****

**UNIVERSIDADE DO SUL DE SANTA CATARINA**

**FABIO DELA BRUNA**

**MÁRCIO OZÓRIO TEIXEIRA**

**GRAFOS HAMILTONIANOS**

Tubarão

2009

**SUMÁRIO**

**1 INTRODUÇÃO**......................................................................................................................2

**2 CICLO HAMILTONIANO E GRAFO HAMILTONIANO**.............................................3

**3 PROPRIEDADES DOS GRAFOS HAMILTONIANOS**...................................................4

3.1 TEOREMA DE ORE............................................................................................................4

3.2 TEOREMA DE DIRAC........................................................................................................4

**4 APLICAÇÃO DO GRAFO HAMILTONIANO**.................................................................5

4.1 O PROBLEMA DO CAIXEIRO VIAJANTE......................................................................5

4.2 O PROBLEMA DA COLETA DE CORRESPONDÊNCIAS.............................................5

**5 CONCLUSÃO**........................................................................................................................7

**REFERÊNCIAS**........................................................................................................................8

**1 INTRODUÇÃO**

Nesse documento abordaremos o resultado de uma pesquisa realizada para encontrar os métodos utilizados de modo a conseguir identificar os grafos hamiltonianos.

Apresenta-se neste documento o conceito de grafos hamiltonianos, os teoremas utilizados para identificar se um grafo é hamiltoniano e onde no mundo real podem-se utilizar os grafos hamiltonianos para se chegar a um resultado de forma eficaz.

**2 CICLO HAMILTONIANO E GRAFO HAMILTONIANO**

Segundo PIRES, a existência de um caminho que passa exatamente uma vez por cada vértice de um grafo é chamado de caminho hamiltoniano, em homenagem ao matemático irlandês William Rowan Hamilton (1805-1865), que estudou este problema no grafo determinado pelas arestas de um dodecaedro regular. Caso o caminho começa e termina no mesmo vértice, temos um ciclo hamiltoniano. Um grafo que contém um ciclo hamiltoniano é um grafo hamiltoniano.

Como meio de exemplo, consideram-se os grafos abaixo, titulados de G1 e G2. Pode-se notar de maneira fácil que G1 contém o ciclo [v1, v 2 ,v 3 ,v 4 ,v 5 ,v 1] que é hamiltoniano. Sendo assim, G1 é um grafo hamiltoniano. O mesmo não acontece com G2.

****

O cálculo do ciclo hamiltoniano é um problema muito complexo, pois não são conhecidas as condições necessárias e suficientes para que um grafo genérico contenha um ciclo hamiltoniano nem métodos eficientes para construir tal ciclo.

Segundo CAMACHO, não se conhece um algoritmo eficiente para verificar se um grafo é hamiltoniano (por eficiente, entendemos aqui um algoritmo em que o número de passos seja limitado por um polinômio no número de vértices do grafo). Além disso, parece improvável que tal algoritmo possa algum dia ser encontrado, porque sua existência implicaria na existência de algoritmos eficientes para um grande número de outros problemas, para os quais também não se conhecem algoritmos eficientes. Estes problemas (incluindo o de verificar a existência de circuito hamiltoniano) formam uma classe de problemas chamados de NP - completos, ou seja, podemos verificar em tempo polinomial se temos uma solução, mas não podemos produzir uma solução em tempo polinomial.

Entretanto, verifica-se que com grafos consideravelmente pequenos consegue-se chegar à conclusão caso ele seja ou não hamiltoniano, porém, a única garantia de que um grafo é hamiltoniano ocorre quando possuímos um grafo completo que contém mais de dois vértices, ou seja, consideram-se [v1, v2 ... vn] os vértices de um grafo G. Como existe uma aresta entre qualquer par de vértices, é possível, a partir de v1, percorrer essa seqüência até vn e voltar a v1.

**3 PROPRIEDADES DOS GRAFOS HAMILTONIANOS**

Como não existe um processo competente para determinar se um grafo é Hamiltoniano, foram inventados alguns teoremas específicos para determinados tipos de grafos, os quais fornecem condições que são, na maior parte dos casos, suficientes, porém não necessárias para definir se um grafo é ou não hamiltoniano. Logo abaixo descreve-se dois destes teoremas.

3.1 TEOREMA DE ORE

Segundo COSTA, o teorema de Ore descreve o seguinte, seja G um grafo simples com ordem 3), sendo que *n* é o número de vértices de G. Se para todos os pares de vértices *u*, *v* de G não adjacentes, grau (*u*) + grau(*v*) , desta forma é gerada uma condição suficiente (mas não necessária) para que o grafo G seja Hamiltoniano.

3.2 TEOREMA DE DIRAC

Segundo COSTA,o teoremade Dirac descreve o seguinte, seja G um grafo simples, de ordem 3), tal que grau(*v*) para qualquer vértice *v* de G. Desta forma é gerada uma condição suficiente (mas não necessária) para que o grafo G seja um grafo Hamiltoniano.

**4 APLICAÇÃO DO GRAFO HAMILTONIANO**

O conceito de grafos vem sendo aplicado nas mais diversas áreas do conhecimento em várias situações, visando uma solução eficaz para o referido problema. Abaixo citamos dois dos problemas mais comuns quanto aos grafos hamiltonianos.

4.1 O PROBLEMA DO CAIXEIRO VIAJANTE

O problema do Caixeiro Viajante determina que tenha de se passar por todos os vértices de um grafo, sem repetir algum vértice, a fim de encontrar um caminho ótimo. Supõe-se que a área de venda de um caixeiro viajante inclua várias cidades, as quais, aos pares, estão conectadas por rodovias. O trabalho do caixeiro requer que ele visite cada cidade pessoalmente. Sob que condição seria possível para ele estabelecer uma viagem circular (que o leve ao ponto de partida) de forma que ele visite cada cidade exatamente uma vez?

Este problema pode ser modelado por um grafo G(V, E), onde:

* V = {c | c é uma cidade}
* E = {(c1, c2) | há uma estrada que conecta as cidades c1 e c2, sendo que ela não passa por nenhuma outra cidade neste trajeto}.

Modelado desta forma, a solução deste problema passa por verificar se o grafo G é hamiltoniano.

4.2 O PROBLEMA DA COLETA DE CORRESPONDÊNCIAS

O problema da Coleta de Correspondências determina que tenha de se passar por todos os vértices de um grafo, sem repetir algum vértice, a fim de encontrar um caminho ótimo. Supondo que a Empresa Brasileira de Correios e Telégrafos mantêm vários postos de coleta de correspondência espalhados pela cidade, inclusive em bairros mais afastados.

A localização e a quantidade destes postos são por vezes modificadas de forma que, diariamente o motorista responsável por recolher a correspondência recebe um esquema que mostra o melhor percurso para passar em todos os postos de coleta.

Sob que condição seria possível para ele estabelecer uma viagem circular (que o leve ao ponto de partida) de forma que ele visite cada posto de coleta exatamente uma vez?

Este problema pode ser modelado por um grafo H(V, E), onde:

* V = {c | c é um posto de coleta}
* E = {(c1, c2) | há uma estrada que conecta os postos de coleta c1 e c2, sendo que ela não passa por nenhuma outra cidade neste trajeto}.

Exemplificado desta forma, a solução deste problema passa por verificar se o grafo H é hamiltoniano.

**5 CONCLUSÃO**

Em relação à pesquisa realizada pode-se concluir que os grafos hamiltonianos são interessantes quando aplicados de maneira correta, pois, eles fazem com que a resolução de alguns problemas complexos possam ser resolvidos de forma eficaz.

Porém, os teoremas descritos nesta pesquisa deixam a desejar, pois se não for um grafo completo eles acabam não sendo suficientes para determinar se um grafo realmente é hamiltoniano. Além do mais, são teoremas que possuem um custo de tempo muito grande, caso o grafo não apresente poucos vértices. Sendo que na maioria das vezes utilizando-se de métodos de tentativa e erro, se tornam mais interessantes do que, por exemplo, utilizar o teorema de Ore, na qual eu tenho de verificar a adjacência de cada vértice, e para cada vértice encontrado verificar se a soma dos graus dos vértices não é maior que o número de vértices do grafo.

**REFERÊNCIAS**

CAMACHO, César. Eureka! . **Sociedade Brasileira de Matemática**, Rio de Janeiro, jan./jun. 2007. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/export/sites/default/arquivos/Eureka.pdf>. Acesso em: 01 mai. 2009.

COSTA, Álvara. **Grafos Hamiltonianos**.Disponível em: <w3.math.uminho.pt/~fmena/**grafos**.pdf >.Acesso em: 01 mai. 2009.

PIRES, Allan Sampaio; SILVA, André Marcelo Coelho da; CARDOSO, Tiago Dias. **As Classes de Problemas NP.** Disponível em: *<*minerva.ufpel.edu.br/~tcardoso/an\_algor/classe\_NP.doc*>.* Acesso em: 01 mai. 2009.